LES JEUX DANS LES COLLECTIONS DU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS DE PARIS, 1 – LE JEU ICOSIEN (1859)

(1re partie)

par Michel Boutin

Les collections du Conservatoire national des arts et métiers (Cnam) contiennent quelques jeux peu connus, qu'il est intéressant de présenter ici. Certains d'entre eux pourraient être qualifiés de « jeux mathématiques » ou de « casse-tête », en raison de leur proximité avec la Théorie des graphes, le calcul binaire, les pavages, etc., d'autres sont plutôt des jeux de pions abstraits à plusieurs joueurs. La plupart de ces jeux archivés dans les réserves du Conservatoire sont dus aux dons du mathématicien français Édouard Lucas (1842-1891).

Le Jeu icosien, décrit dans ce premier article, est basé sur la Théorie des graphes ; il a ainsi un profil mathématique très marqué, et en même temps sa structure permet d'y jouer à plusieurs personnes ; tout dépend de la règle avec laquelle on joue.

LE CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

En septembre 1794, l'abbé Henri Grégoire, député du Loir-et-Cher, s'exprime devant la Convention nationale en ces termes : « Je viens vous présenter les moyens de perfectionner l'industrie nationale ». Lors de cette intervention, il aborde les nombreux sujets[1] actés dans un long rapport qui sera à l'origine de la création par décret, en octobre 1794, du « Conservatoire des arts et métiers ».

> Il sera formé à Paris, sous le nom de Conservatoire des arts et métiers, et sous l'inspection de la commission d'agriculture et des arts, un dépôt de machines, modèles, outils, dessins, descriptions et livres dans tous les genres d'arts et de métiers. L'original des instruments et machines inventés ou perfectionnés sera déposé au Conservatoire.[2]

Selon Édouard Bonnefous[3], l'objectif principal de cette initiative était de donner à la jeune République française une industrie moderne capable de « concurrencer l'étranger », c'est-à-dire l'Angleterre dont les sciences et les techniques étaient plus développées qu'en France à cette époque. Ce décret de 1794 fut mis en application seulement en 1798 par le Conseil des Cinq-Cents qui attribua le prieuré de Saint-Martin (le prieuré de Saint-Martin-des-Champs) à ce nouvel établissement public. Par ses multiples interventions, l'abbé Grégoire semble avoir eu un rôle de premier plan pour la protection des biens nationaux et la dénonciation du vandalisme de toute nature : destruction de monuments, autodafé de livres, vente et saccage d'œuvres d'art, etc. Le Conservatoire était ainsi dans cette logique de préservation du patrimoine intellectuel (objets scientifiques et techniques, machines, matériel expérimental, dessins, inventions diverses, arts, etc.). Cette nouvelle institution avait aussi des objectifs éducatifs qui étaient indispensables à la nation : expliquer la fabrication et l'utilisation des machines aux artisans et aux artistes ; organiser un enseignement gratuit et public de haut niveau. Les premiers cours commenceront au début du XIXe siècle avec l'aide des collections d'objets scientifiques que les professeurs pouvaient déplacer dans les salles de cours sur des rails ; ce mini réseau de « voies ferrées » est toujours visible dans les parquets des galeries d'expositions du musée. Sous l'impulsion de l'astronome français Louis Arago, Louis XVIII promulgua une ordonnance en novembre 1819 pour développer cet enseignement gratuit et public.

Dès son installation en 1798, le Conservatoire a été chargé de la publication des brevets d'invention qui furent créés en France en 1791 par l'Assemblée nationale législative. Sous l'Ancien Régime, un inventeur devait obtenir un privilège du Roi pour

1 – L'industrie, le patrimoine, l'artisanat, l'éducation, les sciences, les arts, etc. Pour comprendre le terme « art » dans ce contexte, il est utile se référer à l'*Encyclopédie* ; extrait : ... « Si l'objet s'exécute, la collection & la disposition technique des règles selon lesquelles il s'exécute, s'appellent *Art*. Si l'objet est contemplé seulement sous différentes faces, la collection & la disposition technique des observations relatives à cet objet s'appellent *Science :* ainsi la *Métaphysique* est une Science, & la *Morale* est un *Art*. ... ». La totalité de l'*Encyclopédie* est accessible en ligne : http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/

2 – Un exemplaire de ce rapport fut retrouvé récemment dans la bibliothèque du musée du Conservatoire. Il a été réédité avec des commentaires (Paris, Cnam, 2010) par Philippe Durance, professeur associé au Cnam.

3 – Édouard Bonnefous, *Le Conservatoire national des arts et métiers, son histoire, son musée*, Paris, Cnam, 1980.

bénéficier du fruit de sa découverte, selon des règles peu objectives ; alors des inventeurs partaient à l'étranger, privant ainsi la France de nombreuses innovations pour son développement industriel et culturel. Par surcroît, en assurant la publication et la promotion des inventions françaises, le Conservatoire participait à l'indépendance de la France.

L'entité musée issue du Conservatoire s'est constituée essentiellement à partir de trois ensembles selon Claudine Fontanon[4] : « Le cabinet des machines » de l'Académie des sciences ; les machines de Vaucanson ; les collections révolutionnaires.

– Le cabinet des machines de l'Académie des sciences. Colbert créa l'Académie des sciences en 1666, et il lui donna des moyens pour acheter du matériel expérimental qui s'est ensuite enrichi de dons ; ainsi est né le cabinet des machines. En 1785, les académiciens obtiennent du Roi un local pour les exposer au public.

– Les machines de Vaucanson. C'est la collection la plus importante, après celle de l'Académie des sciences, qui a rejoint le Conservatoire. Jacques Vaucanson (1709-1782) est connu pour ses inventions d'automates dont certains principes lui ont permis de perfectionner les métiers à tisser, préparant ainsi l'utilisation des cartes perforées par Joseph M. Jacquard. En 1744, J. Vaucanson entra à l'Académie des sciences, puis en 1782, il légua ses automates à Louis XVI qui achèta l'hôtel de Mortagne en 1783 où les automates ont été construits. En 1785, le mathématicien Alexandre Théophile Vandermonde[5] fut nommé conservateur des machines de Vaucanson.

– Les collections révolutionnaires. En 1790, A. Vandermonde, qui était déjà conservateur des machines de Vaucanson, fut nommé par les assemblées de la Révolution au « Comité d'Aliénation » créé pour désigner les biens à conserver, en particulier ceux de l'Église. Ainsi les machines, métiers, instruments et autres objets utiles à l'instruction publique » ont-ils rejoint le Conservatoire.

Deux siècles après sa création, à la fin du XX^{e} siècle, le musée et les réserves du Conservatoire s'étaient beaucoup dégradés. Ainsi, Dominique Ferriot (directrice du musée de 1988 à 2000) rédigea un rapport alarmant sur l'état de l'institution intitulé : « Pour une renaissance du Musée national des techniques ». Elle remit son étude au directeur du Cnam en juin 1988. Elle écrivait :

> Le musée est en état de mort apparente : peu de visiteurs, pas d'atelier ou presque, des salles fermées faute de moyens et transformées en « grenier », plus d'acquisitions, pas d'expositions temporaires...[6]

Une rénovation s'imposait, elle fut menée dans le cadre des Grands Travaux de l'État entre 1990 et 2000. Lors de cette rénovation, un immense bâtiment fut construit à la Plaine Saint-Denis pour accueillir les ateliers de restauration et les réserves. Environ 2 500 objets, parmi plus de 80 000 se trouvant dans les réserves du Conservatoire, sont exposés à Paris dans les galeries du « Musée des arts et métiers » qui fut profondément rénové, puis inauguré en avril 2000.

Les jeux présentés dans cette série d'articles sont tous archivés dans les réserves du Conservatoire à Saint-Denis. Selon le registre des collections, Édouard Lucas, mathématicien français (1842-1891), aurait donné 116 objets : matériels scientifiques ; jeux ; livres ; documents. Les jeux et casse-tête, archivés dans les réserves du Conservatoire, peuvent être répartis en quatre groupes selon leur mode d'entrée dans les collections :

– Cinq jeux ont été donnés par Lucas en 1888 selon le journal officiel du 8 avril 1889 : baguenaudiers (deux modèles différents) ; la tour de Hanoï (deux modèles différents) ; le jeu des pyramides.

– Neuf jeux[7] probablement donnés par Édouard Lucas : l'Icosagonal-Jeu des 20 forts (s.d.) ; l'Arithmétique diabolique (1888) ; la Fasioulette (1905) ; Jeu des mages (s.d.) ; jeu de mosaïque (carrés du Père Sébastien Truchet) (1988) ; taquin (s.d.) ; le Jeu icosien (1988) ; le Jeu militaire (1888) ; un ensemble de carrés numérotés de 1 à 25 (s.d).

– L'initiateur mathématique : jeu des petits cubes (1910).

– Un jeu donné par Gaston Camus, son inventeur : Jeu de triangles (1905).

ÉDOUARD LUCAS

Édouard Lucas (1842-1891) est un mathématicien français qui a enseigné en classes préparatoires dans plusieurs établissements, à Moulins puis à Paris[8]. Il était inventif, curieux des nouveautés scientifiques et

---

4– Claudine Fontanon, « Les origines du Conservatoire national des arts et métiers et son fonctionnement à l'époque révolutionnaire (1750-1815) », *Les Cahiers d'histoire du Cnam*, 1992, p. 17-44.

5– Alexandre Théophile Vandermonde est l'auteur d'une publication au sujet de la marche du cavalier (voir « La Fasioulette » dans un prochain numéro du *Vieux Papier*).

6– Extrait du rapport de Dominique Ferriot, 1988.

7– La date, associée au nom des jeux, correspond à leur entrée dans les collections du Conservatoire ; certains sont sans date (s.d.).

8– Édouard Lucas a enseigné les mathématiques en classes préparatoires dans plusieurs lycées : Moulins (1872-1876) ; lycée Charlemagne à Paris (1876-1879) ; lycée Saint-Louis à Paris (1879-1890) ; de nouveau à Charlemagne (1890-1891).

passionné par les mathématiques récréatives qu'il a enrichies par de nombreuses publications, souvent en dehors du cadre académique de son époque :

> À la fois produit du système et hors de ce système, entre les « hautes mathématiques » et le mouvement pour l'avancement des sciences auquel il adhère, Lucas fait ce qui est à sa portée, dans le domaine qu'il aime. ...La géométrie de situation attire Lucas ; il s'agit d'une science amusante, encore peu structurée, au contenu mouvant depuis les « petits dessins » d'Euler. Il y aborde de grands problèmes, s'y fourvoie parfois, en tire les *Récréations,* au carrefour de l'algèbre combinatoire et de la théorie des graphes. [9]

En 1891, lors du banquet de clôture d'un congrès à Marseille de l'AFSA (Association française pour l'avancement des sciences), Édouard Lucas reçoit dans la joue, un éclat de porcelaine issu de la chute d'une pile d'assiettes. Cette blessure s'est infectée et Lucas meurt d'un érysipèle à l'âge de 49 ans. Sa disparition prématurée ne lui a pas permis de publier ses dernières recherches, en particulier ses nombreux documents au sujet des récréations mathématiques ; les deux premiers volumes étant déjà édités chez Gauthier-Villars (tome I en 1882 et tome II en 1883). Dès le décès d'Édouard Lucas, Charles-Ange Laisant (docteur en sciences mathématiques) contacte Henri-Auguste Delannoy pour créer une commission d'examens de ses manuscrits ; Émile Lemoine (mathématicien) les rejoint dans cette tâche [10]. Le travail minutieux de ces trois polytechniciens mathématiciens et des Gauthier-Villars père et fils a permis l'édition posthume de trois ouvrages : *Récréations mathématiques* (tome III, 1892 et tome IV, 1894) puis l'*Arithmétique amusante* (1895). Les cinq livres d'Édouard Lucas (les quatre tomes des *Récréations mathématiques* et l'*Arithmétique amusante*) ont été plusieurs fois réédités, par exemple dans les années 1960-70 par la Librairie scientifique et technique Albert Blanchard à Paris.

Édouard Lucas a publié une multitude d'articles sur les jeux, et ses recherches font aussi l'objet de publications très diverses, en France et à l'étranger. Les références bibliographiques de nombreuses de ces publications sont accessibles sur deux sites internet. [11] Par ailleurs, en coopération avec l'éditeur de jeux scientifiques Chambon & Baye, il a inventé et publié plusieurs jeux et six fascicules, tous datés en 1889 :

1 – La Fasioulette.
2 – La Pipopipette.
3 – La Tour de Hanoï.
4 – L'Icosagonal ou le jeu des Vingt Forts.
5 – L'Arithmétique diabolique ou le calcul infernal.
6 – Les Pavés Florentins du Père Sébastien.

THE NEW ICOSIAN GAME (JEU ICOSIEN)

L'origine du jeu

Ce jeu mathématique fut inventé en 1857 par William Rowan Hamilton (1805-1865), astronome et mathématicien irlandais, puis édité en 1859 avec le titre *The New Icosian Game* (Jeu icosien) par John Jaques & Son *(Fig. 1* et **→couleurs-I***)*. Cette entreprise britannique, toujours active, a publié de nombreux jeux dès le milieu du XIX^e siècle : pièces d'échecs Staunton (1850), Reversi (1884), etc. William Hamilton a créé ce nouveau jeu à partir de ses découvertes (les quaternions [12] en 1843, puis le calcul icosien [13] en 1856), et de ses propres réflexions au sujet des parcours sur les arêtes des polyèdres réguliers [14]. Mais, à la même époque, le mathématicien écossais Thomas P. Kirkman (1806-1895) a publié ses recherches au sujet des parcours (chemins et cycles) sur les arêtes des graphes issus des polyèdres, ce qui a conduit les auteurs de *Graph Theory 1736-1936* à émettre cette remarque :

> Il arrive parfois que la même idée mathématique discutée par deux personnes indépendamment, se développe à peu près au même moment. C'était le malheur de Kirkman d'être surpassé par un « père » plus célèbre, le mathématicien William Rowan Hamilton. [15]

Cette allusion ambivalente peut laisser penser que le Jeu icosien est le fruit de deux inventions simultanées et indépendantes, l'une due à P. Kirkman en Écosse, l'autre à W. Hamilton en Irlande. Pourtant la création du Jeu icosien et la

---

9– Anne-Marie Décaillot-Laulaguet, *Édouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIX^e siècle*, thèse présentée en vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université René Descartes, Paris V, 1999.

10– J.-M. Autebert, A.-M. Décaillot, S.R. Schwer, « Henri-Auguste Delannoy et la publication des œuvres posthumes d'Édouard Lucas », *Société mathématique de France (SMF), Gazette*, 5 janvier 2003.

11– http://edouardlucas.free.fr/fr/liste_des_oeuvres.htm et http://edouardlucas.free.fr/fr/bibliographie.htm

12– Un quaternion « q » est défini par les équations : $q = a + bi + cj + dk$; $i^2 = j^2 = k^2 = -1 = ijk$. On a aussi : $ik = 1$ et $ki = -1$, donc ik # ki. Les nombres a, b, c et d sont des Réels, et i, j et k sont la racine carrée de « -1 ». Les quaternions appartiennent à l'algèbre non commutative et ils sont une extension des nombres complexes : $z = ai + b$, où a et b sont des Réels, et « i » un imaginaire dont le carré est égal à « -1 ».

13– Sir William Rowan Hamilton, « Memorandum respecting a new System of Roots of Unity », *The London Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. XII, juillet-décembre, 1856, p. 446. Cette publication, d'une seule page, fut traduite en français par Laisant : voir Édouard Lucas, *Récréations mathématiques*, tome II, Paris, 1883, p. 236-237.

14– Nous utiliserons ici le vocabulaire actuel (graphe, sommet, arête, etc.) et les définitions propres à la Théorie des graphes : un chemin est dit *hamiltonien* quand il passe par tous les sommets, une fois et une seule fois. Si ce chemin est fermé (le point de départ et le point d'arrivée sont alors confondus), c'est un *cycle hamiltonien*.

15– N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Oxford, Clarenton Press, 1976, p. 31.

Fig. 1 – The New Icosian Game. *(CNAM, Paris – photos MB)*.

rédaction de sa notice d'accompagnement sont clairement l'œuvre du mathématicien irlandais qui a conçu ce « *New Game* » pour illustrer ses deux inventions en mathématiques (quaternions et calcul icosien).

La découverte des quaternions, ces nombres particuliers qui ont vivement contribué au développement de l'analyse vectorielle, est le résultat d'une longue et rude recherche de W. Hamilton. Il raconte lui-même qu'il a trouvé soudainement la solution à l'extension des nombres complexes à des dimensions supérieures, en se promenant avec sa femme sur le bord du canal de Dublin. Immédiatement il est allé graver sa découverte sur le pont le plus proche (Broom Bridge). Aujourd'hui, une plaque est fixée sur ce pont à la mémoire de Sir William Rowan Hamilton et de sa « soudaine » découverte des quaternions. En 2005, pour le bicentenaire de sa naissance, la poste irlandaise a émis plusieurs timbres dont celui de 48 c., illustré par l'une des équations gravées sur le pont *(Fig. 2)*. Quelques années plus tard, en 1856, W. Hamilton poursuit son exploration des quaternions et introduit un nouveau type de calcul algébrique, connu sous le nom de « calcul icosien » (voir note 12). Ensuite, le 17 octobre de la même année, il envoya une longue lettre à John T. Graves, un ami mathématicien irlandais (1806-1870), au sujet de sa nouvelle découverte ; la dernière partie de cette lettre, contient les germes du Jeu icosien[16] :

J'ai remarqué que certains jeunes se sont amusés en essayant un nouveau jeu mathématique à partir de l'icosien. Une personne place cinq marqueurs sur cinq points consécutifs, et l'autre joueur place, par rapport à la théorie développée dans cette lettre, 15 autres marqueurs selon un cycle « cyclical succession » de manière à passer par tous les points et à terminer à proximité immédiate du marqueur de départ.

Cette anecdote a certainement contribué à l'invention du Jeu icosien par W. Hamilton qu'il a présenté pour la première fois à Dublin en 1857, lors d'un meeting, aux membres de l'association britannique *The British Association for the Advancement of Science*[17]. Ensuite, sous

16– Norman Biggs, « The Icosian calculus of today », *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A : Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 95A, 1995, p. 23-34.

17– Le texte fondateur du jeu, qui fut distribué à cette association britannique, est reproduit dans la notice du jeu : « In a Ltitograph, which was distributed in Section A of the British Association, during its Meeting at Dublin in 1857, ... » Ce texte a été traduit par Laisant dans le tome II des *Récréations mathématiques* de Lucas déjà cité.

l'impulsion de J. Graves, un contact fut établi entre W. Hamilton et l'éditeur « John Jaques and Son » qui s'est acquitté d'un droit de 25 £ avant d'enregistrer le design de ce nouveau jeu cognitif abstrait, d'une structure inédite, le 18 avril 1959 sous le n° 119549. Il fut commercialisé sous le nom de *The New Icosian Game* et bénéficia d'une modeste information dans le journal *The Times* du 1er décembre 1860[18]. La version commerciale du jeu est composée de trois entités :

– une planche circulaire en bois sur laquelle est gravé un graphe topologiquement équivalent à un dodécaèdre régulier convexe (20 sommets, 30 arêtes et 12 faces pentagonales). Les graphes relatifs aux polyèdres réguliers convexes sont aussi appelés « diagramme de Schlegel » ;

– une boîte de 20 pions en porcelaine dont 5 verts numérotés de 1 à 5, et 15 noirs numérotés de 6 à 20 ;

– une notice d'explications dont la première page donne une règle de base pour jouer.

La notice du jeu

Signée par John Jaques and Son mais essentiellement rédigée par W. Hamilton lui-même ; cette notice comprend trois parties.

La 1re partie *(Fig. 3)*, nommée « The Icosian Game » (voir la traduction ci-dessous), montre le diagramme du jeu et donne toutes les explications pour jouer. Dans le langage d'aujourd'hui, en Théorie des graphes, ce type de diagramme est appelé « graphe planaire non orienté » ; dans le Jeu icosien, les 20 sommets sont repérés par les consonnes B-W.

LE JEU ICOSIEN

Dans ce nouveau jeu (inventé par Sir William Rowan Hamilton, LL.D., etc., de Dublin, et nommé par lui-même Icosian d'un mot grec signifiant « vingt »), un joueur doit placer tout ou partie d'un ensemble de vingt pions numérotés, sur les points ou dans les trous d'un plateau représenté par le diagramme ci-dessus *(Voir Fig. 3)*, de manière à toujours suivre les lignes de la figure, et aussi à remplir certaines autres conditions dont certaines peuvent être assignées à un autre joueur. L'ingéniosité et l'habileté peuvent ainsi être exercées en proposant et en résolvant des problèmes ludiques. Par exemple, le premier des deux joueurs peut placer les cinq premiers pions dans cinq trous consécutifs, puis demander au second joueur de placer consécutivement les pions restants de telle sorte que la succession puisse être cyclique, c'est-à-dire, de sorte que le n° 20 puisse être adjacent au n° 1 ; il est toujours possible de répondre à toute question de ce genre. Ainsi, si BCDFG sont les cinq points initiaux donnés, il est permis de compléter la succession en suivant l'ordre alphabétique des vingt consonnes, comme suggéré par le diagramme lui-même ; mais après avoir placé le n°6 au point H, comme précédemment, il est permis (par les conditions supposées) de mettre le n° 7 en X au lieu de J, puis de conclure avec la succession, WRSTVJKLMNPQZ. *(Fig. 4)*. D'autres exemples de problèmes icosiens, avec des solutions pour certains d'entre eux, se trouvent dans les pages suivantes.

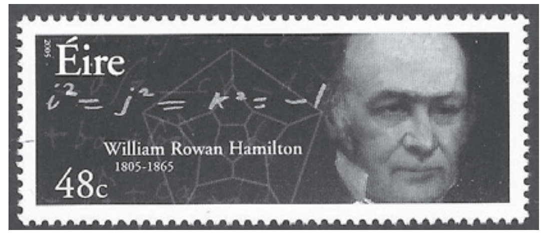
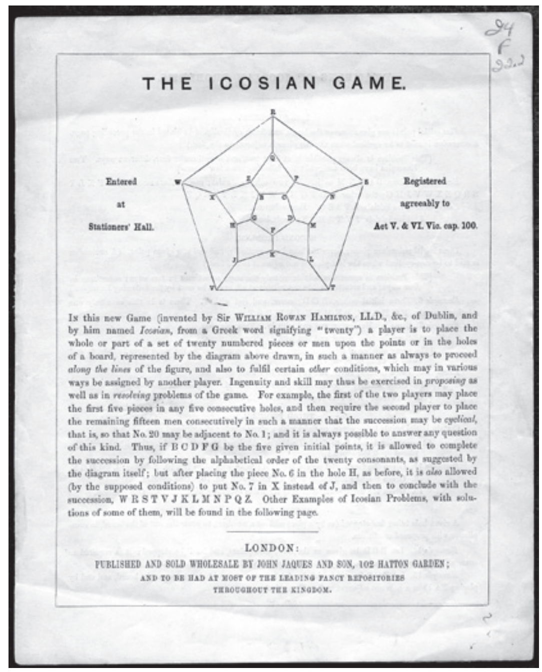


Fig. 2 – Timbre irlandais du bicentenaire de la naissance de William R. Hamilton. L'équation, relative aux quaternions, fut gravée par Hamilton lui-même sur un pont à Dublin.



THE ICOSIAN GAME.

Entered at Stationers' Hall.

Registered agreeably to Act V. & VI. Vic. cap. 100.

In this new Game (invented by Sir William Rowan Hamilton, LL.D., &c., of Dublin, and by him named *Icosian*, from a Greek word signifying "twenty") a player is to place the whole or part of a set of twenty numbered pieces or men upon the points or in the holes of a board, represented by the diagram above drawn, in such a manner as always to proceed *along the lines* of the figure, and also to fulfil certain *other* conditions, which may in various ways be assigned by another player. Ingenuity and skill may thus be exercised in *proposing* as well as in *resolving* problems of the game. For example, the first of the two players may place the first five pieces in any five consecutive holes, and then require the second player to place the remaining fifteen men consecutively in such a manner that the succession may be *cyclical*, that is, so that No. 20 may be adjacent to No. 1; and it is always possible to answer any question of this kind. Thus, if B C D F G be the five given initial points, it is allowed to complete the succession by following the alphabetical order of the twenty consonants, as suggested by the diagram itself; but after placing the piece No. 6 in the hole H, as before, it is *also* allowed (by the supposed conditions) to put No. 7 in X instead of J, and then to conclude with the succession, W R S T V J K L M N P Q Z. Other Examples of Icosian Problems, with solutions of some of them, will be found in the following page.

LONDON:
PUBLISHED AND SOLD WHOLESALE BY JOHN JAQUES AND SON, 102 HATTON GARDEN;
AND TO BE HAD AT MOST OF THE LEADING FANCY REPOSITORIES
THROUGHOUT THE KINGDOM.

Fig. 3 – Première page de la notice du jeu qui en comprend quatre au total, dont une page publicitaire de John Jaques. Les mentions « Registered agreeably to Act V. & VI Vic. Cap. 100. » rappellent que le jeu a été enregistré conformément aux lois V et VI de 1842 dans les registres des dessins et modèles britanniques ; l'abréviation « Vic. » se réfère à la Reine Victoria. (Informations communiquées par Michael Thomson).

La 2e partie, « Examples of Icosian Problems », est composée de quatre paragraphes : « First Problem (Examples 3-5) ; Second Problem

18– Informations communiquées par Michael S. Thomson, spécialiste britannique des jeux de John Jaques.

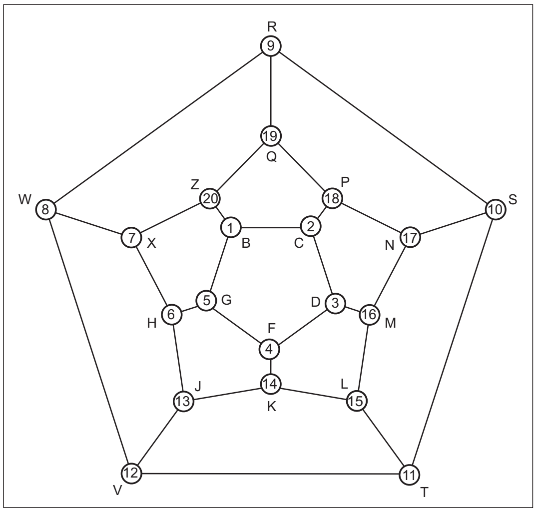


Fig. 4 – Second exemple donné dans la première partie de la notice du Jeu icosien (Fig. 3). Le parcours est : BCDFG-HX-WRSTVJKLMNPQZ. Les sommets de départ « B » et d'arrivée « Z » sont adjacents : ce parcours est un cycle hamiltonien.

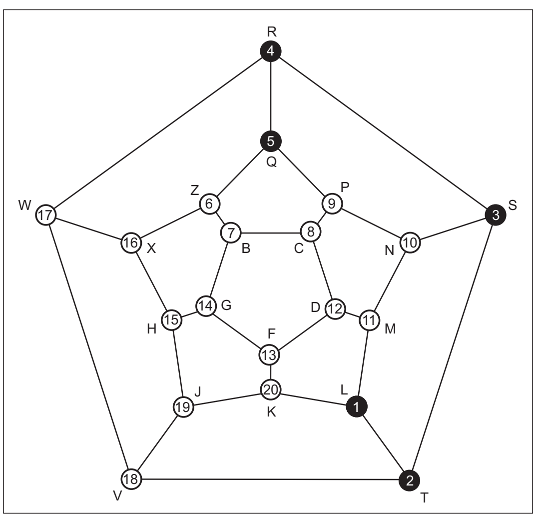


Fig. 5 – First problem (Example 3) *: les cinq premiers sommets du parcours cyclique sont repérés par des « pions verts » (1-2-3-4-5). Le cycle correspond à l'équation : dgdg-dgggdddgdgdgggdd : LTSRQ-ZBCPNMDFGHXWVJK.*

(Examples 6-10) ; Third Problem (Examples 11-13) ; Fourth problem (Examples 14-15) ». Les deux premiers exemples (non numérotés, mais pouvant être apparentés à « Examples 1-2 ») ont été exposés dans la 1re partie de la notice (voir la traduction ci-dessus). Quels que soient les exemples, tous les « problèmes » proposés sont des activités ludiques que l'on pourrait appeler : jeux ; défis ; casse-tête ; jeux de patience ; etc.

La 3e partie, « Hints on the Icosian Calculus », comprend une reproduction des deux publications fondatrices du jeu : le calcul icosien et la lithographie distribuée à l'association britannique (voir notes 13 et 17).

Le premier texte correspond à son article de base au sujet du calcul icosien « Memorandum respecting a New System of Roots of Unity » qui fut publié dans le *Philosophical Magazine* en décembre 1856. Le second texte est une reproduction de la lithographie qui fut distribuée au meeting de 1857 à Dublin dans laquelle W. Hamilton met en pratique son calcul isosien au service du jeu. Dans cette lithographie, il admet que tout déplacement sur les arêtes du graphe, appelé parfois « icosien », peut être représenté par une suite de deux variables : « g » pour aller à gauche, et « d » pour la droite. En effet, un voyageur arrivant à un sommet du graphe peut continuer son chemin, soit à gauche soit à droite. Les règles du calcul icosien, la non commutativité « gd # dg » et l'associativité « (gd)d = g(dd) = gdd = gd^2 », sont mises en pratique dans cette application ludique.

À partir d'un sommet du graphe, quel qu'il soit, si le voyageur tourne 5 fois à droite ou 5 fois à gauche en se déplaçant sur les arêtes, il reviendra au même point. Il est donc possible d'écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} g^5 &= d^5 = 1 \\ gd^2g &= dgd \\ dg^2d &= gdg \\ g^2 &= dg^3d \\ d^2 &= gd^3g \end{aligned}$$

Ces relations permettent d'établir une séquence de 20 mouvements qui correspondent au passage sur tous les sommets une fois et une seule fois. Le point de départ du chemin et le point d'arrivée étant confondus, ce voyageur réalise un cycle qui sera appelé plus tard « cycle hamiltonien » :

$$\begin{aligned} 1 &= g^5 = g^2g^3 \\ &= (dg^3d)g^3 = dg^3dg^3 = (dg^3)^2 = (dg^2g)^2 = (ddg^3dg)^2 \\ &= (d^2g^3dg)^2 = (d^2g^2gdg)^2 = [d^2dg^3dgdg]^2 \\ &= [d^3g^3(dg)^2]^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Cette équation[19] (1), égale à l'unité car il s'agit d'un parcours cyclique, établie grâce aux lois du calcul icosien, fut expliquée dans le document lithographié distribué aux membres du meeting de l'association britannique en 1857 (voir note 17). Elle peut être développée sous les formes suivantes :

19– Cette formule, établie par W. Hamilton, donnée dans la notice du jeu, est reprise par quelques auteurs de la Théorie des graphes (par exemple, Claude Berge en 1958). Elle est aussi reproduite dans des ouvrages plus anciens sur les récréations mathématiques (É. Lucas, A. Sainte-Laguë, W.W. Rouse Ball, W. Ahrens, etc.).

dddgggdgdgdddgggdgdg = 1 (2)

Par symétrie : gggdddgdgdgggdddgdgd = 1 (3)

Exemples de jeux proposés par W. Hamilton dans la 2e partie de la notice

First problem (Examples 3, 4, 5) – Dans ce premier problème, comportant un ensemble de trois exemples, les cinq pions verts sont placés dans l'ordre sur les cinq premiers sommets d'un cycle (dit hamiltonien). L'objectif du jeu est alors de terminer ce cycle avec les 15 autres pions. Dans l'exemple n° 4, les premiers sommets imposés sont LTSRQ *(Fig. 5)*. Les exemples 3 et 5 sont du même type.

Pour ces trois « exemples », l'objectif du jeu étant d'effectuer un cycle, si les joueurs sont « découragés », ils pourront recourir aux équations (2) et (3) ci-dessus en connaissance du calcul icosien : la non commutativité et l'arrangement cyclique des variables. Cette seconde particularité permet de commencer par n'importe quel sommet. Pour résoudre le défi proposé dans cet exemple, les orientations à suivre pour respecter le circuit LTSRQ doivent concorder à une suite partielle imbriquée au moins dans l'une des deux équations (2) & (3). Alors, si le voyageur arrive au sommet « L » à partir de l'arête KL, il devra s'orienter à droite vers « T », à gauche vers « S », à droite vers « R », à gauche vers « Q » ; il aura ainsi respecté le début du cycle LTSRQ pouvant s'écrire « dgdg ». Pour continuer le voyage, il suffit de rechercher toutes les positions de cette suite de quatre variables « dgdg » dans les équations (2) & (3) ; trois possibilités apparaissent : voir (4), (5) et (6). Ce voyageur peut aussi choisir d'arriver à « L » à partir de l'arête ML ; dans ce cas, il recherchera la suite partielle « gauche-gauche-droite-gauche », c'est-à-dire « ggdg » ; il n'aura qu'une seule solution possible pour réaliser un cycle : (7).

dgdg-dgggdddgdgdgggdd :
LTSRQ-ZBCPNMDFGHXWVJK (4)

dgdg-ggdddgdgdgggdddg :
LTSRQ-PNMDCBZXWVJHGFK (5)

dgdg-dddgggdgdgdddggg :
LTSRQ-ZXWVJHGBCPNMDFK (6)

ggdg-dgdddgggdgdgdddg :
LTSRQ-ZBGHXWVJKFDCPNM (7)

Second problem (Examples 6-10) – Les trois premiers sommets du voyage et celui d'arrivée sont imposés. L'objectif du jeu est de compléter le chemin dont le départ et la fin sont ainsi connus. Parfois ce genre de problème n'a pas de solution. Dans ces cinq exemples (6-10), le chemin doit passer par tous les sommets une seule fois, mais il ne s'agit pas d'un cycle [20]. Pour l'exemple n° 6, les trois premiers sommets imposés sont BCD, et celui d'arrivée sera « T ». La seule solution possible est donnée dans la notice : BCD-FGHXZQPNMLKJVWRS-T.

Third problem (Examples11-13) – Un début de parcours de plusieurs sommets adjacents est imposé ainsi qu'un numéro de pion fixant la longueur du chemin. Les joueurs ont pour objectif de réaliser un parcours en passant par 10 sommets, sans pouvoir continuer avec la règle ordinaire (un seul passage par sommet). Dans l'exemple n° 11, on donne BCDM pour commencer le voyage, et le pion noir n° 10 pour son arrivée. La solution donnée dans la notice est : BCDM-LKJHGF. La règle est respectée car le chemin est bien composé de 10 sommets, et il est impossible de continuer le voyage puisque les trois sommets adjacents au point d'arrivée « F » sont « D », « G » et « K », et ils sont déjà inclus dans le parcours.

Fourth problem (Examples 14-15) – Un sommet déterminé préalablement ne devra pas être inclus dans le chemin. Ensuite, à partir de trois sommets imposés, les joueurs devront réaliser un parcours ne comprenant que 19 sommets, bien entendu sans passer par celui qui est exclu : ce chemin doit donc se terminer dans une impasse. Dans l'exemple n° 15, le voyage doit commencer par BCD, exclure « L » et se terminer sur un 19e sommet sans pouvoir continuer. C'est-à-dire qu'il n'est pas possible de terminer sur un sommet adjacent à « L ». William Hamilton ne donne pas de solution mais Édouard Lucas propose BCD-MNPQZXWRSTVJKFGH [21].

CONCLUSION

Le jeu icosien, l'Icosagonal et la Fasioulette [22] sont des jeux basés sur les graphes, mais ce terme « graph » fut utilisé pour la première fois par James Joseph Sylvester (mathématicien britannique 1814-1897) [23]. En France, à la fin du XIXe siècle et au début du XXe, les graphes et les réseaux sont restés confinés dans la sphère des récréations mathématiques telle la publication de M. A. Sainte-Laguë en 1927,

20– Voir Biggs, Lloyd, Wilson, *Graph Theory*, *op. cit.*, p. 31.

21– Édouard Lucas, *Récréations mathématiques, II*, Paris, 1883, p. 222.

22– L'Icosagonal et La Fasioulette seront présentés dans les prochains numéros du *Vieux Papier*.

23– James J. Sylvester, « Chemistry and Algebra », *Nature*, 17, 1877-8, p. 284. Le *Dictionnaire historique de la langue française* d'Alain Rey (2010, 1re édition 1993) confirme l'origine du mot français « graphe » en précisant qu'il serait apparu en France seulement dans les années 1920 ; avant, on parlait souvent de réseaux.

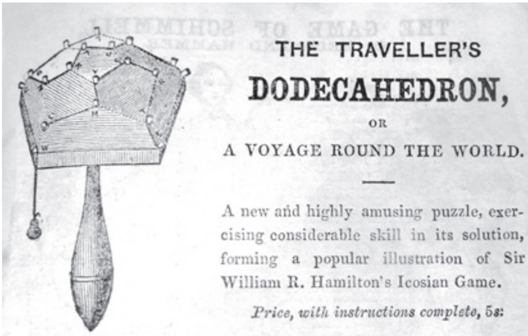


Fig. 6 – Extrait du catalogue John Jaques de 1861. Le joueur tient la hampe d'une main, et avec l'autre main, il accroche la ficelle de sommet en sommet pour matérialiser son parcours « de ville en ville ». (coll. et photo de Michael S. Thomson)

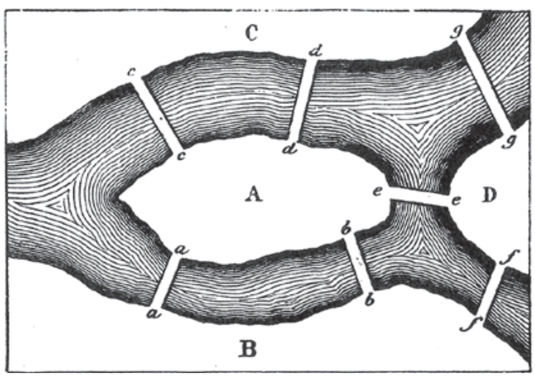


Fig. 7 – Les sept ponts sur la Pregel dans la ville de Königsberg en 1736 (Édouard Lucas, Récréations mathématiques, *I, Paris, 1882, p. 19-38).*

Géométrie de situation et jeux, où le Jeu icosien y est sommairement décrit[24]. Il faudra attendre les années 1960, avec les publications du mathématicien français Claude Berge[25] (1926-2002), pour assister au développement de la Théorie des graphes qui fut ensuite utilisée dans de nombreuses disciplines. Maintenant, cette théorie et ses nombreuses applications sont enseignées dans les classes du secondaire[26]. Ces trois jeux permettent de découvrir les bases de cette théorie, à condition de savoir les présenter sans masquer leur intérêt ludique. Édouard Lucas, par ses publications et ses inventions de jeux inédits, a su réaliser la prouesse de faire découvrir et apprécier les mathématiques par l'intermédiaire de diverses activités ludiques, sans dévoyer les plaisirs du jeu. Actuellement, en France, plusieurs associations ont cet objectif, c'est le cas de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public).

Dans le Jeu icosien, en proposant une boîte de 20 pions dont cinq sont verts et numérotés de 1 à 5, et les 15 autres sont noirs et numérotés de 6 à 20, William Hamilton et l'éditeur du jeu John Jaques suggèrent des parties à plusieurs participants ; par exemple, c'est le cas quand le premier joueur place les cinq pions verts sur cinq sommets adjacents pour commencer un cycle, et que le second continue le parcours avec les 15 pions noirs. Plus généralement, le Jeu icosien est avant tout un matériel ludique avec lequel on peut imaginer toutes sortes de règles pour jouer, à condition qu'elles soient cohérentes et acceptées par tous.

L'éditeur britannique John Jaques a publié une autre version du jeu appelée *The Travellers Dodecachedron, or A Voyage Round the World*, dont le tablier du jeu est une construction particulière en 3D et en bois d'un dodécaèdre qui est vissé sur une hampe, également en bois, à la manière d'un bilboquet *(Fig. 6)*. Les joueurs disposent d'une ficelle pouvant s'accrocher aux 20 clous plantés sur les sommets de ce dodécaèdre ; tout chemin imaginé lors d'une partie est alors matérialisé par cette ficelle circulant de sommet en sommet. Dans cette version, les 20 consonnes identifiant les sommets sont associées à des noms de villes afin que tout parcours soit assimilé à un voyage autour du monde : B-Brussels ; C-Canton ; D-Delhi ; F-Frankfort ; G-Geneva ; H-Hanover ; J-Jeddo ; K-Kashmere ; L-London ; M-Moscow ; N-Naples ; P-Paris ; Q-Québec ; R-Rome ; S-Stockholm ; T-Toholsk ; V-Vienna; W-Washington ; X-Xenia ; Z-Zanzibar.

En plus de son aspect ludique, le Jeu icosien a de réels intérêts pédagogiques et historiques, et de nombreuses publications concernant la Théorie des graphes lui font référence. En effet, le nom de Hamilton a été retenu pour qualifier un parcours passant par tous les sommets une fois et une seule fois. Si ce parcours est ouvert, c'est un « chemin hamiltonien » ; s'il est fermé, c'est un « cycle hamiltonien ». Mais selon de nombreux auteurs, Thomas P. Kirkman fut le premier à définir ce genre de cycle dans les polyèdres bien que l'histoire ait retenu le qualificatif « hamiltonien » au détriment de T. Kirkman qui a rejoint le « registre virtuel des savants oubliés ».

Cette notion de « cycle hamiltonien » fait suite à la définition du « cycle eulérien » qui fut modélisé par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783). À cette époque Euler avait à résoudre le problème des sept ponts de la ville de Königsberg

24– M. A. Sainte-Laguë, « Géométrie de situation et jeux », *Mémorial des Sciences Mathématiques*, Fascicule XLI, 1929, p. 53-54.

25– Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, 1958.

26– Léa Cartie, *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*, thèse présentée à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, 2008.

(aujourd'hui Kaliningrad) qui est traversée par la Pregel *(Fig. 7)*. Les habitants se demandaient s'il était possible de partir d'un point de la ville puis traverser tous les ponts une seule fois et revenir au départ. Le problème fut soumis à Euler qui montra que c'était impossible. À partir de ce problème, Euler a établi le premier théorème de la Théorie des graphes en 1736. On dit maintenant, qu'un parcours passant une fois seulement sur toutes les arêtes d'un graphe est un « chemin eulérien » ; si le parcours est fermé, c'est un « cycle eulérien ».

Édouard Lucas, certainement séduit par le Jeu icosien, a traduit partiellement en français[27] la notice d'explications qui accompagne l'édition « John Jaques & Son ». Selon Jean-Michel Kantor[28], William R. Hamilton aurait même prêté un exemplaire du jeu icosien à É. Lucas qu'il a visiblement conservé puisqu'il en a fait don au Conservatoire en 1888. *(Fig. 2)*. C'est probablement cet « emprunt » qui a conduit Édouard Lucas à développer un nouveau jeu, pratiquement équivalent au jeu icosien, qu'il a intitulé : l'Icosagonal-Jeu des 20 forts. La principale différence entre ces deux jeux est l'introduction d'arêtes colorées ; à chaque sommet, arrivent trois arêtes : une bleue ; une blanche ; une rouge. Ces couleurs améliorent l'esthétique du jeu et permettent aux joueurs de créer de nouvelles règles.

Dès le début du XX^e^ siècle, la plupart des auteurs sur la Théorie des graphes mentionnent le problème des ponts de Königsberg et le Jeu icosien, voire même la marche du cavalier (c'est le sujet de la Fasioulette) pour illustrer la notion de cycle hamiltonien. Cette branche fondamentale des mathématiques est aujourd'hui appliquée à pratiquement toutes les disciplines : informatique, réseaux (électriques, téléphoniques, hydrauliques, etc.), internet, graphes de commandes des machines, modélisation des problèmes de communication en sociologie[29], etc.

En tout cas, les notions théoriques sous-jacentes, qui se cachent derrière ces trois jeux-puzzles (Jeu icosien, Icosagonal, Fasioulette) animent de nombreux enseignants du secondaire pour aborder les graphes auprès de leurs élèves et de leurs collègues, via diverses associations ; par exemple : « l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques » (IREM) ; « Math en jeans » (Méthode d'apprentissage des théories mathématiques en jumelant des établissements pour une approche nouvelle du savoir) ; « l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public » (APMEP), le périodique *Tangente*[30], etc. ■

Remerciements

Merci à Monsieur Cyrille Foasso, responsable des réserves du Cnam, de nous avoir chaleureusement accueilli et présenté l'ensemble des jeux ; la famille d'Édouard Lucas, qui nous a transmis un document très précieux pour cette étude ; Michael S. Thomson (spécialiste britannique des jeux de John Jaques & Son), qui nous a donné de précieuses informations historiques ; la bibliothèque nationale irlandaise Royal Irish Academy Library qui nous a communiqué la règle du jeu.

(À suivre.)

27– Édouard Lucas, *Récréations mathématiques, II*, Paris, 1883, p. 210-212.

28– Jean-Michel Kantor, « Le voyage autour du monde », dans *Mathématiques buissonnières*, Paris, 2000.

29– Notre collègue Pierre Parlebas (sociologue et professeur à la Sorbonne) a beaucoup utilisé la Théorie des graphes dans ses recherches et ses publications, en particulier pour étudier les relations de communications dans les jeux sportifs (sports et jeux traditionnels). Voir par exemple l'entrée « Graphes » dans Pierre Parlebas, *Jeux, sports et sociétés*, Paris, 1981 et 1999, p. 155-158.

30– Les éditions Pôle-Tangente ont édité plusieurs fascicules au sujet de la Théorie des graphes, selon une approche très accessible, voire ludique : *Les graphes de la théorie des jeux à l'intelligence artificielle*, HS n° 12, septembre 2002 ; *Les graphes, des nœuds et des arêtes*, HS n° 54, octobre 2014 ; *Les graphes, Représenter les données et les stratégies*, *Tangente Hors-série* n° 54, juin 2015.